

2人のプレイヤーが対戦する「重力付き4目並べ」においては、両者がともに最善を尽くせば有限手数内で勝負がつかない、すなわち必勝法が存在しないことを示してください。

ただし、「重力付き4目並べ」のルールは以下とします。

- 左右方向および上方向に無限に広い2次元格子のマス目を用いる。
- 2人のプレイヤーが交互に1つずつ石を置く。パスすることはできない。
- 1番下の段のマス、もしくは既に石が置かれているマスの1つ上のマスのみ石を置くことができる。
- 自分の石を先に縦、横、斜めのいずれかに4個以上並べて置いたプレイヤーの勝ちとする。
5個以上同時に並べてもよい。



図1：対戦途中の例



図2：後手（緑）勝ちの例

方針

「重力付き 4 目並べ」に必勝法が存在しないことを示すためには、先手後手ともに「相手の手に応じて石を置く位置を決めることで、相手が縦、横、斜めに 4 個以上の石を並べて置くことを防げる」ことを示せば十分です。

「重力付き 4 目並べ」について考える前に、まずは、「重力付き 5 目並べ」に必勝法が存在しないことを証明してみましょう。

図 3 のように盤面を 4 列ずつの区画に分けて考えます。ここで、後手が、

- 1 手前に先手が A に置いたとき、同じ区画のもう一方の A に置く。
- それ以外するとき、1 手前に先手が置いた石の上に置く。

という戦略を取ると、図 4 のようになり、先手はどのように石を置いても縦、横、斜めに 5 個以上の石を並べて置くことはできません。

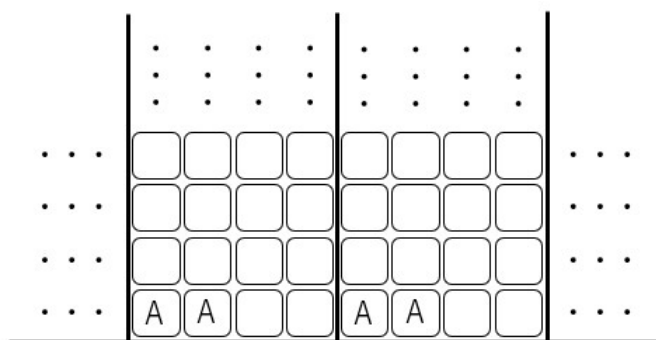


図 3 : 4 列ずつの区画に分ける

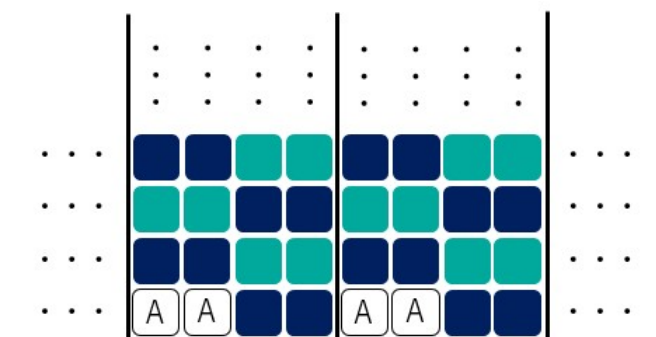


図 4 : 後手 (緑) が戦略に従って石を置いた場合。同じ区画の A の一方には後手の石が置かれる。先手 (紺色) は縦、横、斜めに 5 個以上の石を並べて置くことができない。

同様に、先手が

- 初手は任意の区画の A に置く。
- 1 手前に後手が A に置いたとき、同じ区画のもう一方の A に置く。もう一方の A に既に自分の石が置かれている場合は、他の区画の空いている A に置く。
- それ以外るとき、1 手前に後手が置いた石の上に置く。

という戦略を取ると、後手はどのように石を置いても縦、横、斜めに 5 個以上の石を並べて置くことはできません。

以上で、「重力付き 5 目並べ」に必勝法が存在しないことが示されました。

上記の「重力付き 5 目並べ」の戦略で、相手の石が 4 個並ぶ可能性があるのは 1 番下の段の横方向のみですので、同様の方針で「重力付き 4 目並べ」に必勝法が存在しないことを証明できないか考えてみましょう。区画の取り方や A のような対応するマスの取り方に少し工夫が必要です。

解答

図5のように盤面を8列ずつの区画に分け、マスに記号を付けます。ここで、先手か後手かに関わらず、以下の規則に従って石を置くことを考えます。ただし、特に言及がなければ同じ区画のマスを目指すものとしします。

- 先手の場合、初手は任意の区画の C_1 に置く。
- 1手前に相手が A に置いたとき、もう一方の A に置く。
- 1手前に相手が B に置いたとき、もう一方の B に置く。
- 1手前に相手が $C_i (1 \leq i \leq 2)$ に置いたとき、置くことのできる C_j のうち最も添え字が小さいマスに置く。
- 1手前に相手が C_3 もしくは $D_i (1 \leq i \leq 4)$ に置いたとき、置くことのできる D_j のうち最も添え字が小さいマスに置く。
- 1手前に相手が D_5 に置いたとき、 C_1 か C_3 に置ければ置く。どちらにも置けなければ、他の区画の空いている C_1 に置く。
- 上記以外のとき、1手前に相手が置いた石の上に置く。

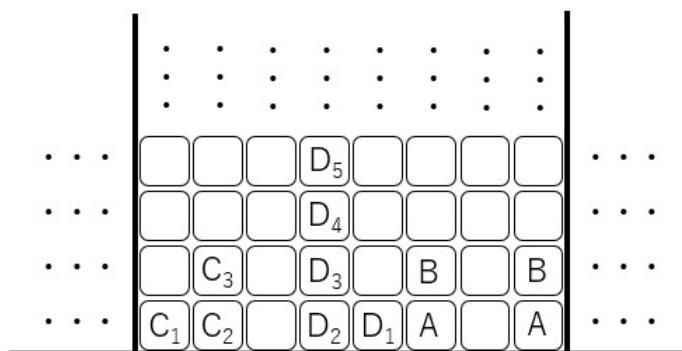


図5：8列ずつの区画に分ける

このような規則に従って石を置くことで、図6の同じ番号を付けた2つのマスのうち一方には自分の石を置くことができます。¹従って、図7のように石が置かれることになり、相手（紺色）は縦、横、斜めに4個以上の石を並べて置くことができません。

両者とも、相手が縦、横、斜めに4個以上の石を並べて置くことを防ぐ戦略を持つため、「重力付き4目並べ」には必勝法が存在しないことが示されました。

¹①～⑤は、一方に相手が石を置いたとき、もう一方に既に自分の石が置かれているか、もしくはもう一方に即座に自分の石を置くこととなります。また、⑥に関しても、一方に相手が石を置いたとき、もう一方に既に自分の石が置かれているか、もしくはもう一方にいずれ自分の石を置くこととなります。例えば、 C_3 に相手が石を置いたとき、次に自分は D_1, D_3, D_5 のいずれかに石を置くこととなりますが、 D_1 に置く場合でも、後に D_2 に相手が石を置いた次の手で D_3 に、 D_4 に相手が石を置いた次の手で D_5 に置くことになり、最終的に D_5 に自分の石を置くこととなります。

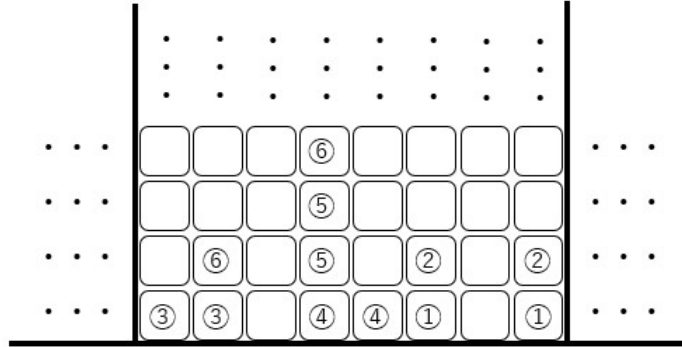


図 6 : 同じ番号を付けた 2 つのマスのうち一方には自分の石を置くことができる

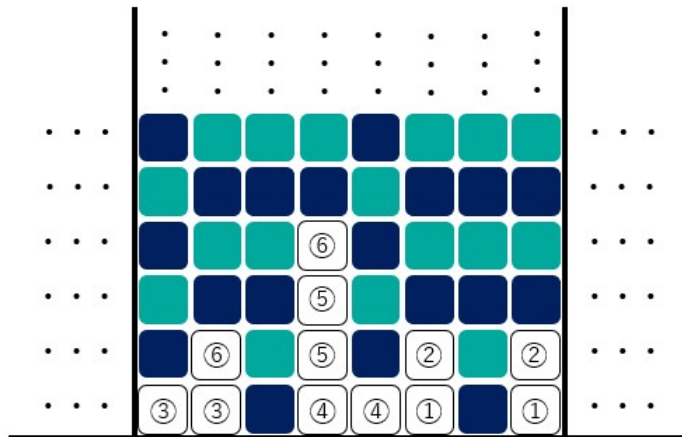


図 7 : 緑 が規則に従って石を置いた場合。同じ番号を付けた 2 つのマスのうち一方には 自分の石 が置かれる。相手 (紺色) は縦、横、斜めに 4 個以上の石を並べて置くことができない。