(1) 凸立体 V があります。

V を XY 平面、YZ 平面、ZX 平面に投影した図形の輪郭はすべて 1 辺の長さが 1 の正方形であり（図 1)、XY 平面に投影された正方形の 1 辺と X 軸のなす角は θ $(0 \leqq \theta < \pi/2)$ です（図 2)。

V の体積として考えうる最大値と最小値を θ を用いて表してください。

(2) 自由に問題を拡張して議論してください。

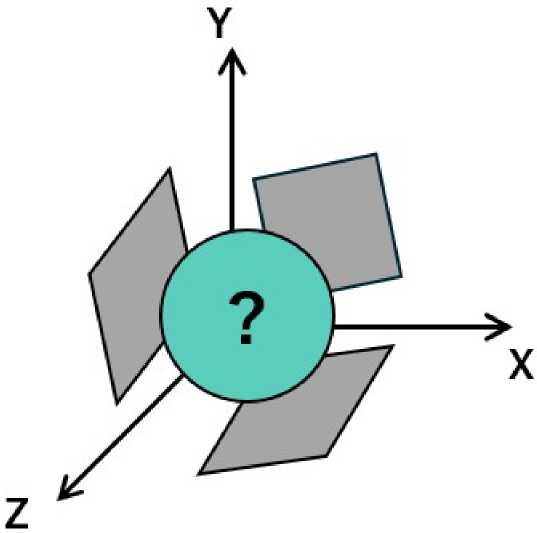

図 1

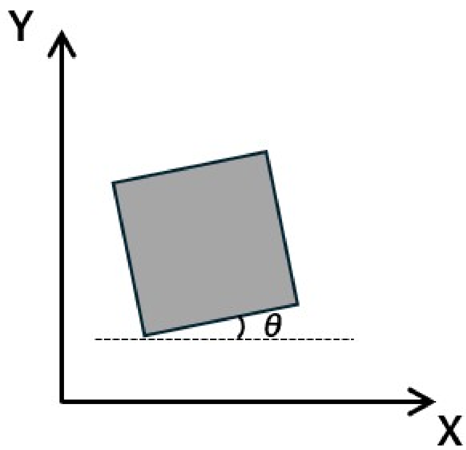

図 2

問題 (1) 解答

凸立体 V の内部および境界を D とおき、

$$
\begin{aligned}
S_{xy} &= \{(x,y)|(x,y,z)\in D\} \\
S_{yz} &= \{(y,z)|(x,y,z)\in D\} \\
S_{zx} &= \{(z,x)|(x,y,z)\in D\}
\end{aligned}
$$

とします。S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} は 1 辺の長さが 1 の正方形です。
ここで、

$$
\begin{aligned}
I_x &= \{x|(x,y,z)\in D\} \\
I_y &= \{y|(x,y,z)\in D\} \\
I_z &= \{z|(x,y,z)\in D\}
\end{aligned}
$$

としたとき、

$$
\begin{aligned}
I_x &= \{x|(x,y)\in S_{xy}\} = \{x|(z,x)\in S_{zx}\} \\
I_y &= \{y|(y,z)\in S_{yz}\} = \{y|(x,y)\in S_{xy}\} \\
I_z &= \{z|(z,x)\in S_{zx}\} = \{z|(y,z)\in S_{yz}\}
\end{aligned}
$$

となります。また、正方形 S_{yz} と Y 軸のなす角を ϕ とおき、

$$
\begin{aligned}
\theta' &= \min\left(\theta, \frac{\pi}{2}-\theta\right) \\
\phi' &= \min\left(\phi, \frac{\pi}{2}-\phi\right)
\end{aligned}
$$

とします $(0 \leqq \theta', \phi' \leqq \frac{\pi}{4})$。
区間 I の長さ（測度）を $|I|$ と表記するとき、

$$
\begin{aligned}
|I_y| &= |\{y|(x,y)\in S_{xy}\}| = \sin\theta' + \cos\theta' \\
|I_y| &= |\{y|(y,z)\in S_{yz}\}| = \sin\phi' + \cos\phi'
\end{aligned}
$$

ですので、$\theta' = \phi'$ です[1]。
S_{zx} についても同様ですので、S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} はすべて、辺が X 軸、Y 軸、Z 軸のいずれかに平行な 1 辺の長さが 1 の正方形を θ' だけ時計回りもしくは反時計回りに回転させた正方形です。
よって

$$
|I_x| = |I_y| = |I_z| = \sin\theta + \cos\theta
$$

となります。

[1] 関数 $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta$ は $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ において狭義単調増加のため。

$c=\dfrac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$ とします。V を平行移動させることで、$I_x=[-c,c]$, $I_y=[-c,c]$, $I_z=[-c,c]$ となるようにできて、このとき S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} の中心がすべて $(0,0)$ となります。

ここで、V を Z 軸の正方向から見た投影図が、1 辺の長さが 1 の正方形を時計回りに θ' だけ回転させた正方形のとき、V を Z 軸の負方向から見た投影図は、1 辺の長さが 1 の正方形を反時計回りに θ' だけ回転させた正方形であり[2]、X 軸、Y 軸に関しても同様なので、以降、V を X 軸の正方向、Y 軸の正方向、Z 軸の正方向から見た図形が、辺が軸に平行で中心が $(0,0)$ の 1 辺の長さが 1 の正方形を $(0,0)$ を中心として θ だけ反時計回りに回転させた正方形であるとして一般性を失いません[3]。

ここで、各面が XY 平面、YZ 平面、ZX 平面のいずれかに平行で、V を内部または境界に包含する最小の直方体は、$(0,0,0)$ を中心とした一辺の長さが $2c=(\sin\theta+\cos\theta)$ の立方体であるので、これを「包含立方体」と呼ぶことにします。

以下、$\theta\neq 0$ のときと $\theta=0$ のときに場合分けして考えます。

$\theta\neq 0$ のとき

(最小値)

3 本の四角柱

$$\begin{aligned}
D_{xy} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | (x,y)\in S_{xy}\}\\
D_{yz} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | (y,z)\in S_{yz}\}\\
D_{zx} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | (z,x)\in S_{zx}\}
\end{aligned}$$

の共通部分を $D_{com}=D_{xy}\cap D_{yz}\cap D_{zx}$ とおくと、$D\subset D_{com}$ です。

$$a=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{2},\quad b=\frac{-\sin\theta+\cos\theta}{2},\quad c=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}$$

とおいたとき、図 3 のように、包含立方体の $z=c$ の面と、D_{yz}, D_{zx} のそれぞれの共通部分を考えることで、点 (a,b,c) は必ず D に含まれることが分かります。

また、包含立方体の他の面に関しても同様に考えることで、5 点 (b,c,a), (c,a,b), $(-a,-b,-c)$, $(-b,-c,-a)$, $(-c,-a,-b)$ も必ず D に含まれることが分かります。

これら 6 点の凸包は図 4 のような 8 面体であり、この 8 面体は問題の条件をみたすので、この 8 面体の体積が求める最小値であり、その値は

$$\frac{4}{3}\left|\det\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\right|$$

のように求められ、計算することで最小値

$$\frac{2}{3}\left(\sin^3\theta+\cos^3\theta\right)$$

を得ます[4]。

[2] $\theta'=0,\frac{\pi}{4}$ のとき、Z 軸の正方向、負方向から見た図形は一致しますが、以降の議論に影響を与えません。

[3] 立方体の 6 面を対面が異なる色となるように 2 色で塗る方法は、回転および反転を同一視して考えると 1 通りしかないため。

[4] この 8 面体は、$PA=PB=PC=2$, $AB=BC=CA=2\sqrt{2-2\sin\theta\cos\theta}$ をみたす 4 点 P,A,B,C を頂点とする四面体の各辺の中点 6 点を頂点とする 8 面体です。この 8 面体の体積を求めることでも最小値を得ることができます。

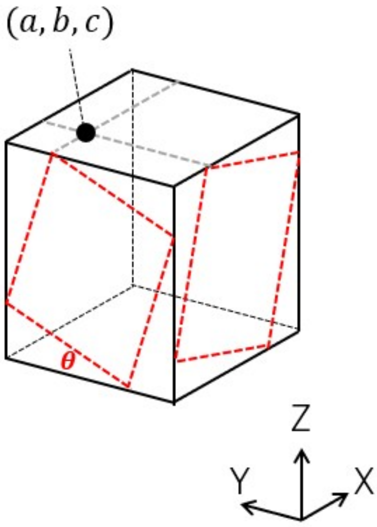

図 3 ：黒線が包含立方体、赤線が V の YZ 平面および ZX 平面への投影図を表す

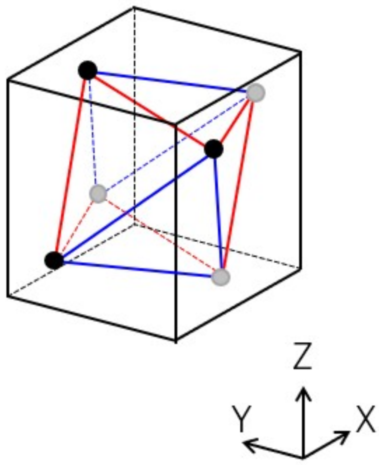

図 4 ：黒線が包含立方体、赤線・青線が体積が最小となる V を表す。赤線は長さ 1 の辺、青線は長さ $\sqrt{2-2\sin\theta\cos\theta}$ の辺

(最大値)

D_{com} は凸立体なので[5]、D_{com} の体積が求める最大値です。D_{com} は、最小値のとき求めた D に必ず含まれる 6 点 (a,b,c), (b,c,a), (c,a,b), $(-a,-b,-c)$, $(-b,-c,-a)$, $(-c,-a,-b)$ に 8 点 $\left(\pm\frac{1}{2(\sin\theta+\cos\theta)}, \pm\frac{1}{2(\sin\theta+\cos\theta)}, \pm\frac{1}{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right)$ を加えた 14 点を頂点とする 12 面体であり[6]、この 12 面体は、図 5 のように、上記 8 点を頂点とする 1 辺が $\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$ の立方体に、この立方体の各面を底面とし、包含立方体の面上に頂点を持つ、高さ $\left(c-\frac{1}{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right) = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ の四角錐をくっつけた立体と見なすことができるので、その体積は

$$\left(\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^3 + 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^2\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$$

です。

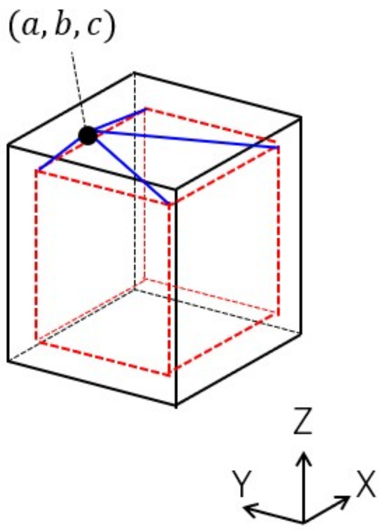

図 5 ：赤線で表された 1 辺が $\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$ の立方体の面を底面とし、包含立方体の面上の D に必ず含まれる点を頂点とした四角錐の例

[5]四角柱 D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} は凸立体であり、凸立体の共通部分は凸立体であるため。
[6]四角柱 D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} の側面、計 12 面を由来とする面を 1 つずつ持つ 12 面体です。

$\theta = 0$ のとき

(最小値)

$\theta = 0$ のとき、包含立方体の 1 辺の長さが 1 であり、3 方向への投影図がすべて 1 辺の長さが 1 の正方形であることから、包含立方体の各辺（端点を含む）上にそれぞれ 1 点以上 D に含まれる点があります。D に含まれる点から、各辺上の点を 1 点ずつ計 12 点を選んだとき（座標が重複しても構いません）、この 12 点すべてを内部または境界上に含む体積最小の凸立体は 12 点の凸包であり、また、この凸包の 3 方向への投影図はすべて 1 辺の長さ 1 の正方形です。よって、12 点を動かしたときの、それらの凸包の体積の最小値を求めればよいことが分かります。

この凸包は、体積 1 の包含立方体から、包含立方体の各頂点と頂点に接続する 3 本の辺上の点の 4 点からなる三角錐[7] 8 個を切り取った立体です。よって、図 6 のように 11 点を固定したまま、包含立方体の辺上を端点からもう一方の端点まで 1 点を移動させると、凸包の体積は線形に変化します。

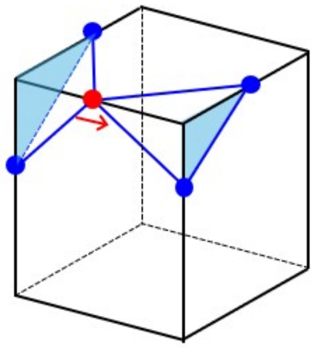

図 6 ：11 点を固定したまま赤点を移動させると、水色に塗られた面を底面とし赤点を頂点とする三角錐は、底面積が変わらず高さが線形に変化するので、その体積和は線形に変化する

よって、12 点すべてが包含立方体の頂点に存在するときのみ調べればよいことが分かります。包含立方体の頂点の部分集合であって、包含立方体の 12 本の辺に対して少なくとも一方の端点を含む条件をみたすもののうち、どの点を取り除いても、この条件をみたせなくなるものは、回転・反転により一致するものを同一視して考えると、図 7 の 2 つに絞られます。

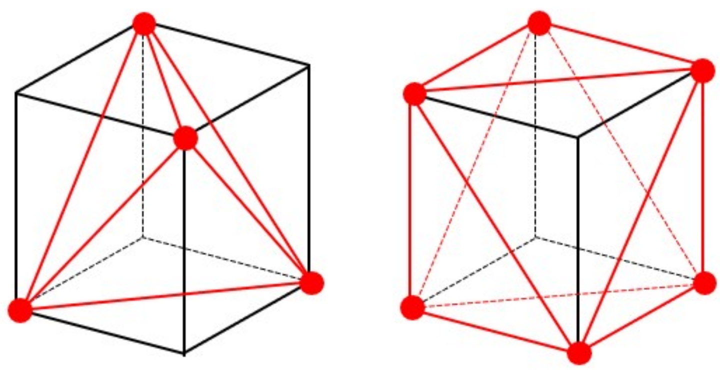

図 7 ：赤点が包含立方体の頂点の部分集合。赤線がそれらの凸包

[7] 頂点が縮退した体積 0 の三角錐でも構いません。

このうち、体積が最小のものは左図の正四面体であり、その体積は $\dfrac{1}{3}$ です。

(最大値)

$\theta \neq 0$ のときと同様に、D_{com} の体積が求める最大値です。D_{com} は、1 辺の長さが 1 の立方体なので、最大値は 1 です。

問題 (2)

- V の表面積の最大値・最小値
- V に包含される最大の球の半径の、V を変化させたときの最大値・最小値
- V の直交 3 軸への投影図が、2 つが 1 辺の長さが 1 の正方形で、あと 1 つが面積 1 の図形であるときの、V の体積の最大値
- 1 辺の長さが 1 の立方体の直交 3 軸への投影図の面積和の最大値・最小値

など、さまざまな拡張をいただきました。